Compléments sur les réels

Dans tout ce chapitre, $A, B\dots$ sont des parties de $\mathbb{R}$.

1 Majorants/minorants, plus grand/petit élément

1.1 Majorants/minorants d'une partie de $\mathbb{R}$

Définition (Majorants/minorants d'une partie de $\mathbb{R}$)

- On dit que A est *majorée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall a \in A, \quad a \leqslant M$.
  Un tel réel M est appelé UN *majorant de A*. On dit aussi que A est *majorée par M* ou encore que *M majore A*.
- On dit que A est *minorée* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall a \in A, \quad m \leqslant a$.
  Un tel réel m est appelé UN *minorant de A*. On dit aussi que A est *minorée par m* ou encore que *m minore A*.
- On dit que A est *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée, i.e. si : $\exists K \in \mathbb{R}_+ / \quad \forall a \in A, \quad |a| \leqslant K$.

Exemple L'intervalle $]-\infty, 1]$ est majoré par 1, MAIS AUSSI par $\sqrt{2}$, 10, $e^{100}\dots$ Il n'est pas minoré en revanche.

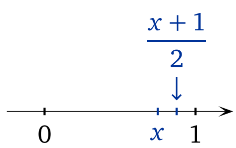
1.2 Plus grand/petit élément d'une partie de $\mathbb{R}$

Définition (Plus grand/petit élément, maximum/minimum d'une partie de $\mathbb{R}$)

- On appelle *plus grand élément de A* ou *maximum de A* tout élément de A qui majore A.
- On appelle *plus petit élément de A* ou *minimum de A* tout élément de A qui minore A.

Définition-théorème (Unicité du plus grand/petit élément) SI A possède un plus grand (resp. petit) élément, celui-ci est unique. On peut donc l'appeler LE plus grand (resp. petit) élément de A et le noter $\max A$ (resp. $\min A$).

Démonstration Soient $M, M' \in \mathbb{R}$. Si M et M' sont deux plus grands éléments de A, alors : $M' \leqslant M$ car M majore A et $M' \in A$, et de même : $M \leqslant M'$ car M' majore A et $M \in A$. Conclusion : $M = M'$. ■



Exemple L'intervalle $[0, 1[$ admet 0 pour plus petit élément mais N'A PAS de plus grand élément.

En effet $0 \in [0, 1[$ et 0 minore $[0, 1[$, donc 0 est le plus petit élément de $[0, 1[$.
Pour montrer que $[0, 1[$ n'a pas de plus grand élément, il nous suffit de montrer qu'aucun élément de $[0, 1[$ ne majore $[0, 1[$. Or pour tout $x \in [0, 1[$: $\quad x < \dfrac{x+1}{2} \quad$ et pourtant : $\quad \dfrac{x+1}{2} \in [0, 1[$.

Théorème (Deux propriétés de $\mathbb{N}$)

(i) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.

(ii) Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

2 Borne supérieure/inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$

2.1 Définition

Nous avons vu que $[0,1[$ n'a pas de plus grand élément, pourtant sa borne 1 est quelque chose de cet ordre — mais quoi exactement ? Comment saisir conceptuellement ce 1 qui à la fois n'est pas dans $[0,1[$ et pourtant n'est pas n'importe qui ? Ce qui rend 1 si particulier pour $[0,1[$, c'est que 1 en est non seulement un majorant, mais surtout le meilleur, l'optimum, le plus petit possible. La définition suivante paraît du coup très naturelle.

Définition (Borne supérieure/inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$)

- **S'il existe**, le plus petit majorant de A est appelé **la** *borne supérieure de A* et noté $\sup A$.
- **S'il existe**, le plus grand minorant de A est appelé **la** *borne inférieure de A* et noté $\inf A$.

Explication

- La différence essentielle entre plus grand élément et borne supérieure, c'est que la borne supérieure, quand elle existe, n'appartient pas forcément à l'ensemble considéré.
- La borne supérieure n'existe pas toujours, mais quand elle existe, elle est unique en tant que plus petit élément — raison pour laquelle on peut parler de **la** borne supérieure.

Théorème (Lien entre les notions de plus grand/petit élément et borne supérieure/inférieure) Si A possède un plus grand (resp. petit) élément, alors A possède une borne supérieure (resp. inférieure) et :

$$\sup A = \max A \qquad (\text{resp. } \inf A = \min A).$$

Démonstration Nous devons montrer que l'ensemble $\mathcal{M}$ des majorants de A possède un plus petit élément — alors A possédera une borne supérieure — et qu'en fait ce plus petit élément est $\max A$ — on aura donc : $\sup A = \max A$. Deux choses à vérifier :

— que : $\max A \in \mathcal{M}$, or par définition, $\max A$ majore A,

— que $\max A$ minore $\mathcal{M}$, or par définition : $\max A \in A$. ■

Exemple Non majoré, l'intervalle $\mathbb{R}_+$ ne possède pas de borne supérieure. En revanche, parce que 0 en est le plus petit élément, 0 en est aussi la borne inférieure.

Exemple Nous avons vu que $[0,1[$ n'avait pas de plus grand élément, mais cela dit $[0,1[$ admet 1 pour borne supérieure.

En effet Nous savons que 1 majore $[0,1[$. Il reste à montrer qu'aucun réel strictement inférieur à 1 ne majore $[0,1[$. Soit $x < 1$ un tel réel.

— Si $x < 0$, alors comme $0 \in [0,1[$, x ne majore pas $[0,1[$.

— Si $x \in [0,1[$, alors : $x < \dfrac{x+1}{2}$ et pourtant : $\dfrac{x+1}{2} \in [0,1[$, donc x ne majore pas $[0,1[$.

Dans les deux cas, x ne majore pas $[0,1[$.

Théorème (Opérations sur les bornes supérieures) On suppose que A et B possèdent chacune une borne supérieure.

(i) Si $A \subset B$, alors : $\sup A \leqslant \sup B$.

(ii) L'ensemble $A \cup B$ possède une borne supérieure et de plus : $\sup(A \cup B) = \max\left\{\sup A, \sup B\right\}$.

(iii) L'ensemble $A + B = \left\{a + b\right\}_{a \in A, b \in B}$ possède une borne supérieure et de plus : $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

(iv) Pour tout $\lambda > 0$, l'ensemble $\lambda A = \left\{\lambda a\right\}_{a \in A}$ possède une borne supérieure et de plus : $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$.

On dispose d'un résultat analogue pour les bornes inférieures.

2.2 Propriété de la borne supérieure/inférieure

- Le résultat qui suit est **une propriété essentielle de l'ensemble des réels**. Sa démonstration dépend de la façon dont on construit $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$, donc ne nous intéresse pas car nous admettons l'existence des nombres réels. En un sens en tout cas, **toute l'analyse est dans ce théorème**. Directement ou non, c'est de lui que nous allons déduire tous les grands théorèmes d'analyse au programme : théorèmes de la limite monotone, théorème des suites adjacentes, théorème de Bolzano-Weierstrass, théorème des valeurs intermédiaires, théorème des bornes atteintes, théorème de Heine, théorème de Rolle, théorème des accroissements finis et construction de l'intégrale.
- Le problème posé est simple : déterminer quelles parties de $\mathbb{R}$ possèdent une borne supérieure.

  Le cas de l'ensemble vide se traite à part : $\varnothing$ admet tout réel pour majorant, donc comme $\mathbb{R}$ n'est pas minoré, $\varnothing$ ne possède pas de borne supérieure.

  Ensuite, évidemment, si une partie non vide de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure, cette partie est aussi majorée — et réciproquement ? Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède-t-elle une borne supérieure ? La réponse est **oui**, ce qui veut dire que le résultat suivant est **le meilleur qu'on pouvait espérer**.

Théorème (Propriété de la borne supérieure/inférieure)

- Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
- Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

En pratique La propriété de la borne supérieure est un résultat d'**existence** mais ne donne aucun renseignement explicite sur la **valeur** de la borne en question. Pour cette raison, elle n'est utilisée que dans des contextes théoriques dans lesquels on ne peut pas connaître cette valeur à l'avance. Pour montrer par exemple que l'intervalle $[0,1[$ admet 1 pour borne supérieure, nous n'avons pas eu besoin d'invoquer la propriété de la borne supérieure car nous avions une intuition explicite.

2.3 Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$

La propriété de la borne supérieure, pourtant si puissante, présente tout de même un réel inconvénient. On aurait préféré l'énoncé suivant : « **Toute** partie de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure. » Que manque-t-il à $\mathbb{R}$ pour que ce résultat soit vrai ? Pourquoi $\mathbb{R}$ lui-même, par exemple, n'a-t-il pas de borne supérieure ? Réponse : parce qu'il n'a pas de majorant. Eh bien rajoutons-en !

Définition (Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$) On appelle *droite achevée* $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R}\cup\left\{-\infty,+\infty\right\}$ dans lequel les symboles nouveaux $-\infty$ et $+\infty$ sont distincts et régis par les lois suivantes :

- **Prolongement de l'ordre :** Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\quad -\infty < x < +\infty$.
- **Prolongement de l'addition :** $\quad x+(+\infty)=(+\infty)+x=+\infty \quad$ et $\quad x+(-\infty)=(-\infty)+x=-\infty$,

  et pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\quad (+\infty)+(+\infty)=+\infty \quad$ et $\quad (-\infty)+(-\infty)=-\infty$.
- **Prolongement de la multiplication :** $\quad \dfrac{1}{+\infty}=\dfrac{1}{-\infty}=0 \quad$ et pour tout $x\in\overline{\mathbb{R}}\setminus\{0\}$:

$$x\times(+\infty)=(+\infty)\times x=\begin{cases}+\infty & \text{si } x>0\\ -\infty & \text{si } x<0\end{cases} \quad \text{et} \quad x\times(-\infty)=(-\infty)\times x=\begin{cases}-\infty & \text{si } x>0\\ +\infty & \text{si } x<0.\end{cases}$$

✖ **Attention !** ✖ Cette définition ne donne aucun sens aux expressions :

$$(+\infty)-(+\infty), \qquad (-\infty)-(-\infty), \qquad 0\times(\pm\infty), \qquad (\pm\infty)\times 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

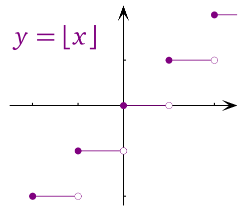
Explication La remarque qui suit est hors programme, mais tout de même éclairante.

- Dans le nouveau monde $\overline{\mathbb{R}}$, rien ne nous empêche de définir comme nous l'avons fait dans $\mathbb{R}$ les notions de majorant/minorant, plus grand/petit élément et borne supérieure/inférieure. Il n'est pas trop dur de vérifier que tous les majorants/plus grands éléments/bornes supérieures que nous trouvions DANS $\mathbb{R}$ sont encore des majorants/plus grands éléments/bornes supérieures DANS $\overline{\mathbb{R}}$, mais certaines parties qui N'avaient PAS de majorant/plus grand élément/borne supérieure se trouvent maintenant en avoir. Par exemple :
  - L'intervalle $\mathbb{R}_+$ est majoré par $+\infty$ DANS $\overline{\mathbb{R}}$ et y admet même $+\infty$ pour borne supérieure — alors qu'il n'était pas majoré DANS $\mathbb{R}$.
  - L'ensemble vide admet tout élément de $\overline{\mathbb{R}}$ pour majorant DANS $\overline{\mathbb{R}}$, or $\overline{\mathbb{R}}$ admet $-\infty$ pour plus petit élément DANS $\overline{\mathbb{R}}$, donc $\varnothing$ admet $-\infty$ pour borne supérieure !
- Plus généralement, dans le nouveau monde $\overline{\mathbb{R}}$ — merci $\overline{\mathbb{R}}$! — la propriété de la borne supérieure s'énonce avec plus de pureté, elle a trouvé son chez-soi :

> TOUTE partie de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne supérieure DANS $\overline{\mathbb{R}}$ — éventuellement $\pm\infty$, donc — qui coïncide avec sa borne supérieure DANS $\mathbb{R}$ lorsqu'il en existe une.

3 Partie entière

Définition-théorème (Partie entière)
Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique ENTIER $n \in \mathbb{Z}$ pour lequel : $n \leqslant x < n+1$, appelé la *partie entière de* x et noté $\lfloor x \rfloor$. Cet entier $\lfloor x \rfloor$ est donc le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.



L'ESSENTIEL EN RÉSUMÉ : $\boxed{x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.}$

Exemple $\lfloor 11 \rfloor = 11$, $\lfloor 5,2 \rfloor = 5$, $\lfloor -4 \rfloor = -4$, MAIS ATTENTION : $\lfloor -7,3 \rfloor = -8$ (et non pas -7).

Démonstration L'existence de la partie entière paraît évidente mais elle découle en réalité de la propriété de la borne supérieure — ce que nous admettrons. ■

Exemple Nous aurons bientôt régulièrement recours aux raisonnements qui suivent, il faut donc bien les comprendre. Soient $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ fixés. Le mot « rang » désigne ci-dessous uniquement des entiers naturels.

- À partir de quel rang est-il vrai que : $\frac{1}{n} < \varepsilon$? Cette inégalité est vraie si et seulement si : $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Comme $\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{1}{\varepsilon}$, l'inégalité : $\frac{1}{n} < \varepsilon$ est vraie à partir du rang $\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor \boxed{+1}$.
- À partir de quel rang est-il vrai que : $n^2 > A$? Cette inégalité est vraie si et seulement si : $n > \sqrt{A}$, donc à partir du rang $\lfloor \sqrt{A} \rfloor \boxed{+1}$.
- À partir de quel rang est-il vrai que : $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$? Cette inégalité est vraie si et seulement si : $2^n > \frac{1}{\varepsilon}$, ou encore : $n > -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}$, donc à partir du rang $\max\left\{0, \left\lfloor -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2} \right\rfloor \boxed{+1}\right\}$. Pourquoi ce « max » ? Parce que nous cherchons un entier naturel.

4 Densité d'une partie de $\mathbb{R}$

Définition (Partie dense dans $\mathbb{R}$) On dit que A est *dense dans* $\mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient un élément de A.

✌ **Explication** ✌ En clair, A est dense dans $\mathbb{R}$ si, entre deux réels distincts, on peut toujours trouver un élément de A. Intuitivement, une partie dense dans $\mathbb{R}$ est donc **UNE PARTIE QUI EST « PARTOUT » SANS ÊTRE FORCÉMENT TOUT.**

Théorème (Densité des rationnels et des irrationnels) $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

✌ **Explication** ✌ En particulier, il y a toujours un rationnel entre deux irrationnels distincts et un irrationnel entre deux rationnels distincts. Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont enlacés l'un à l'autre de façon tout à fait fusionnelle, comme deux peignes imbriqués l'un dans l'autre.

Démonstration Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Nous voulons montrer que l'intervalle $]a, b[$ contient à la fois un rationnel et un irrationnel.

- **Rationnels :** On cherche $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels : $a < \frac{p}{q} < b$. Cherchons même encore mieux : $a < \frac{p}{q} < \frac{p+1}{q} < b$. Dans ce cas, nécessairement : $b - a > \frac{1}{q}$, donc : $q > \frac{1}{b-a}$. Choisissons donc de poser : $q = \left\lfloor \frac{1}{b-a} \right\rfloor + 1$. Alors : $q \in \mathbb{N}^*$ et $1 < q(b-a)$. Posons ensuite : $p = \lfloor qa \rfloor + 1$. Alors : $p \in \mathbb{Z}$ et $qa < p \leqslant qa + 1 < qa + q(b-a) = qb$, donc : $a < \frac{p}{q} < b$ comme voulu.
- **Irrationnels :** D'après le point précédent, l'intervalle $\left]\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right[$ contient au moins deux rationnels $\frac{p}{q}$ et $\frac{p+1}{q}$ dont l'un au moins est non nul, disons r, de sorte que : $r\sqrt{2} \in]a, b[$. Or $r\sqrt{2}$ est irrationnel car s'il était rationnel, $\sqrt{2} = \frac{1}{r} \times r\sqrt{2}$ le serait aussi par produit — ce qui est faux. ■